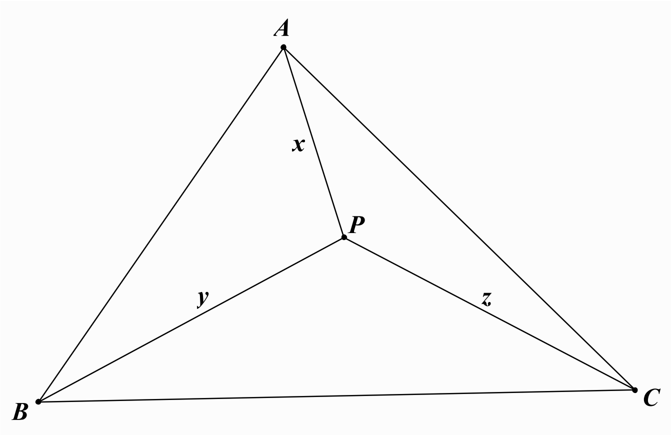
# GENELLEŞTİRİLMİŞ FERMAT NOKTASI

*Problem :*

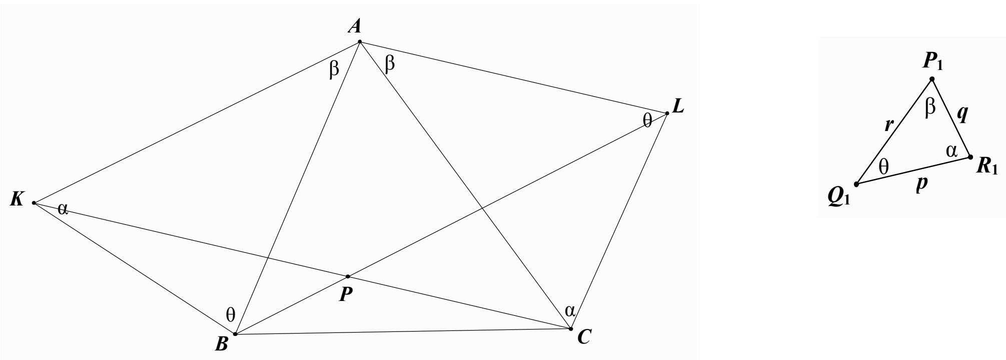



*Şekil 1*

$p,q,r$; bir üçgenin kenar uzunlukları ve ABC üçgeninin düzlemindeki bir P noktası noktası için $|PA| = x$ , $|PB| = y$ ve $|PC| = z$ olmak üzere $px + qy + rz$ toplamının en küçük değerini bulunuz.

Bu noktaya "*Genelleştirilmiş Fermat noktası*" *(G.F.N)* denir. Bu konuda daha önce çalışılmış. Burada amacım *(G.F.N)* nın yerini çizimle bulmak. Belki daha basit çözümler de yapılmış olabilir. Ama burada ben elde ettiğim bir çözümü paylaşmak istedim.

*Çözüm :*



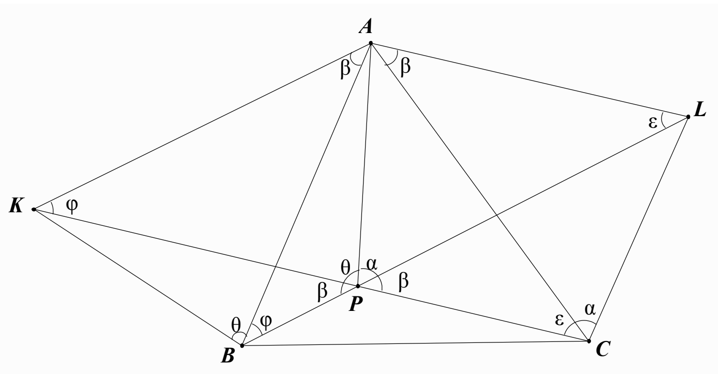

*Şekil 2*

*Şekil 2* de $P_1Q_1R_1$ : kenarları $p,q,r$ olan üçgen olmak üzere $ABC$ üçgeninin $[AB]$ ve $[AC]$ kenarları üzerine şekildeki gibi $P_1Q_1R_1$ üçgenine benzer olacak şekilde $ABK$ ve $ALC$ üçgenlerini çizelim. $[BL] \cap [CK] = P$ olsun. Benzerlikler yardımıyla

$$\left.\begin{aligned} |AK| &= \frac{cq}{r} \\ |AL| &= \frac{br}{q} \end{aligned}\right\} \text{ dir.}$$

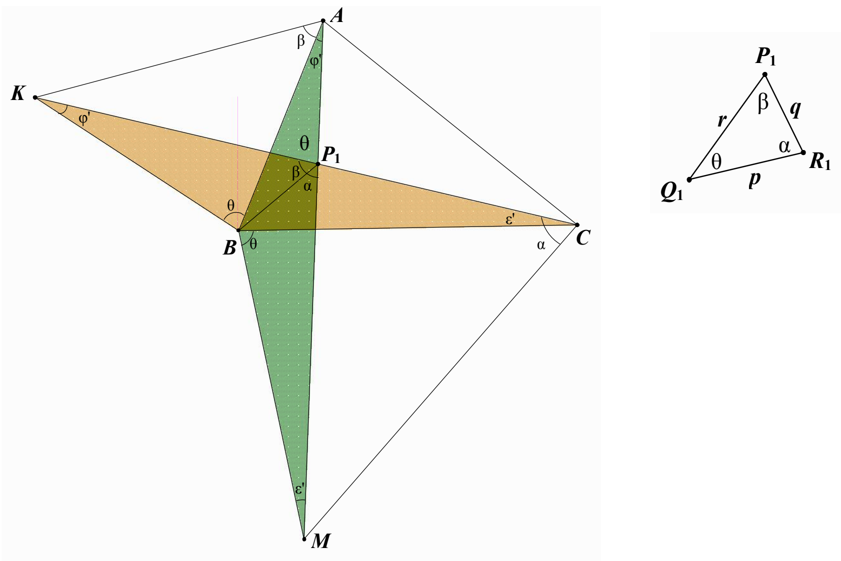
$$\angle(KAC) = \angle(LAB)\ ,\ \frac{|AK|}{|AC|} = \frac{\frac{cq}{r}}{b} = \frac{cq}{rb} \quad \text{ve} \quad \frac{|AB|}{|AL|} = \frac{c}{\frac{br}{q}} = \frac{cq}{rb} \ \text{olduğundan}$$

$(KAC) \sim (BAL)$   $(K.A.K.)$ Açılar *Şekil 3* deki gibi yerleştirilirse *KAPB* ve *LAPC* dörtgenlerinin kirişler dörtgenleri olduğu görülür.




*Şekil 3*

Şimdi de $P_1Q_1R_1$ üçgenine benzer olacak şekilde *ABK* ve *MBC* üçgenlerini *Şekil 4* deki gibi çizelim. $[MA] \cap [CK] = P'$ olsun.




*Şekil 4*

$$\left.\begin{aligned} |BK| &= \frac{cp}{r} \\ |AL| &= \frac{ar}{p} \end{aligned}\right\} \text{dir.}$$

$$\angle(KBC)=\angle(MBA)\ ,\ \frac{|BK|}{|BC|}=\frac{\frac{cp}{r}}{a}=\frac{cp}{ra} \quad \text{ve} \quad \frac{|AB|}{|BM|}=\frac{c}{\frac{ar}{p}}=\frac{cp}{ra} \ \text{olduğundan}$$

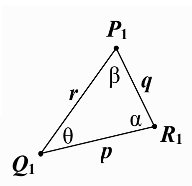
$(KBC)\sim(ABM)$ $(K.A.K.)$ Açılar *Şekil 4* deki gibi yerleştirilirse *AKBP'* ve *BMCP'* dörtgenlerinin kirişler dörtgenleri olduğu görülür. *Şekil 3* ve *Şekil 4* deki $[CK]$ doğruları ortaktır.

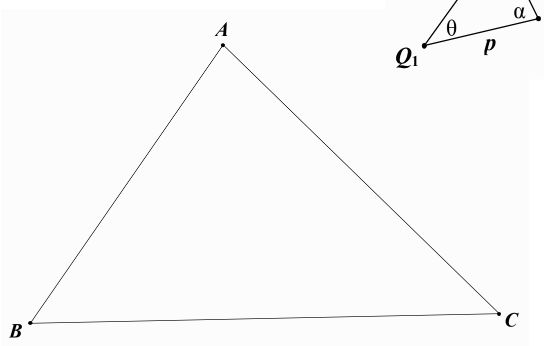
*Şekil 3* te $P\in[KC]$ ve $\angle(APB)=\beta+\theta$

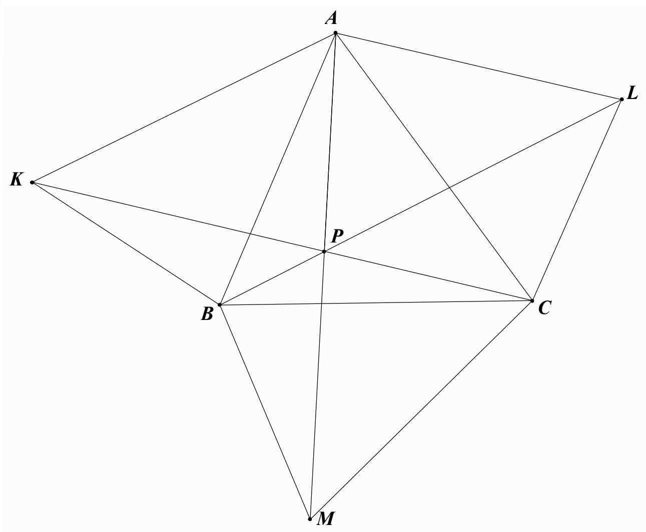
*Şekil 4* te $P_1\in[KC]$ ve $\angle(AP_1B)=\beta+\theta$

Olduğundan $P$ ve $P_1$ noktaları çakışıktır. $\Rightarrow P\equiv P'$

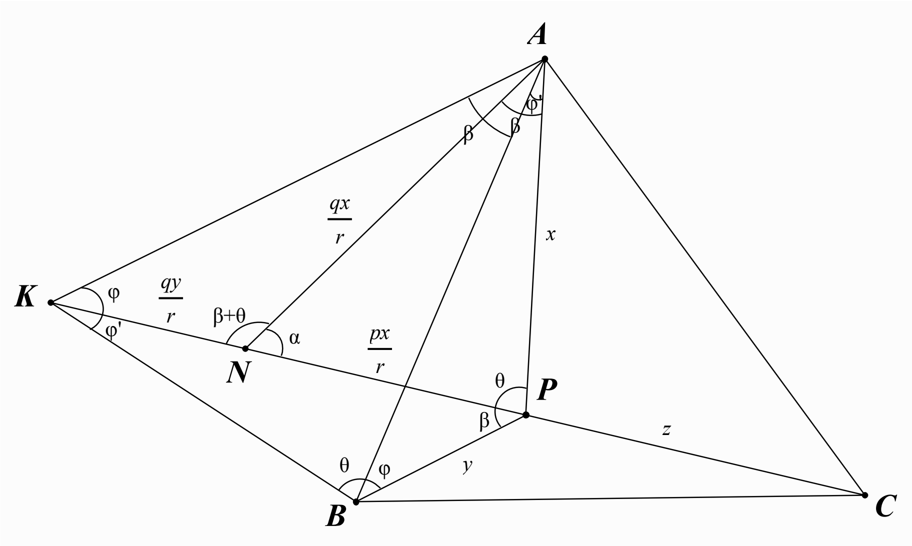
*Sonuç :* $ABC$ ve $P_1Q_1R_1$ üçgenleri verildiğinde $[AB],[BC],[CA]$ kenarları üzerine dışa doğru kurulan sırasıyla $KAB, CAL, CMB$ üçgenlerinin K,L,M köşelerini sırasıyla C,B,A noktalarına birleştiren doğrular noktadaştır. Bu noktaya "*Genelleştirilmiş Fermat Noktası" (GFN)* denir.




*Şekil 5*




*Şekil 6*

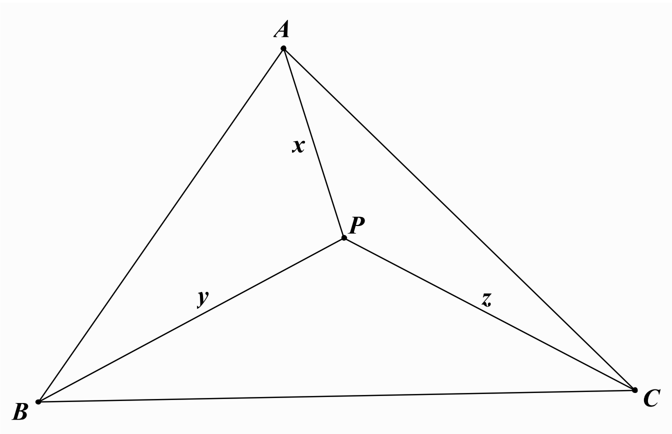
$ABC$ üçgeninde $P$ noktası "*GFN" olsun.* $[PK]$ üzerinde $N$ noktasını $\angle(NAP)=\beta$ olacak şekilde alalım. $APN \sim P_1Q_1R_1$ olur ve

$$|NP|=\frac{px}{r},|NA|=\frac{qx}{r} \quad ...............1$$

elde edilir. $\angle(KAN)=\varphi'$ olduğundan $KAN \sim BAP$ (A.A.) $\dfrac{|KN|}{|NA|}=\dfrac{|BP|}{|PA|} \Rightarrow |KN|=\dfrac{qy}{r}$ ........2

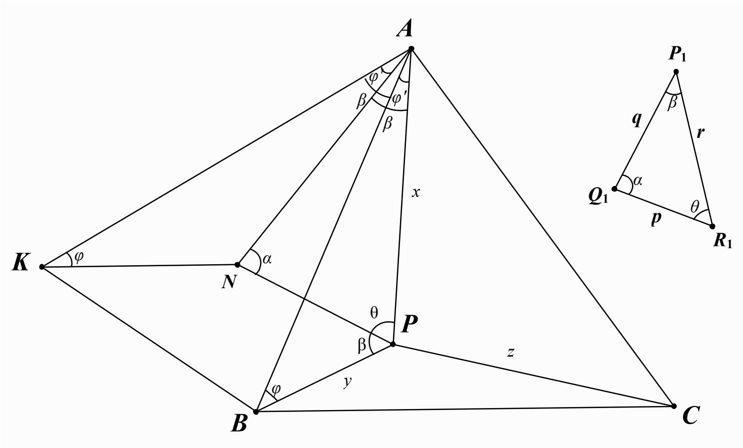
elde edilir.

1 ve 2 no lu sonuçlar birleştirilirse $|KC|=z+\dfrac{px}{r}+\dfrac{qy}{r}=\dfrac{1}{r}(px+qy+rz)$ elde edilir.




Şimdi problemimize dönüp yandaki üçgende $px+qy+rz$ toplamını inceleyelim. ( $p,q,r$ ) verilen pozitif reel sayılar.

*Şekil 7*




*Şekil 8*

$AP$ kenarı üzerine $NAP \sim P_1Q_1R_1$ olacak şekilde $NAP$ üçgenini çizelim. *( şekil 8 )*

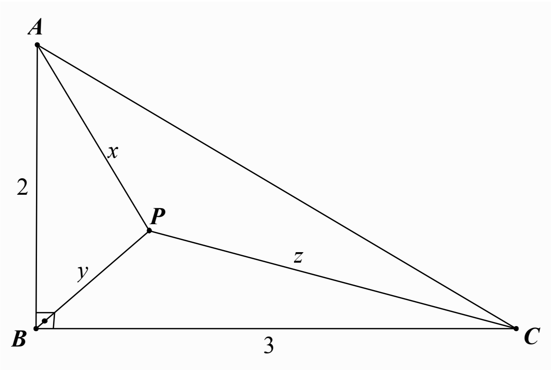
$|NP| = \dfrac{px}{r}$ ve $|AN| = \dfrac{qx}{r}$ olur. Son olarak $ABP \sim AKN$ olacak şekilde $[AN]$ kenarı üzerine $AKN$ üçgenini çizelim. $|KN| = \dfrac{qr}{y}$ elde edilir. $ABC$ ve $P_1Q_1R_1$ üçgenleri verildiğinde $K$ noktasının yeri sabittir. $|KN|+|NP|+|PC| = \dfrac{qy}{r}+\dfrac{px}{r}+z = \dfrac{1}{r}(px+qy+rz)$ olur. Öte yandan

$|KN|+|NP|+|PC| \geq |KC| \Rightarrow \dfrac{qy}{r}+\dfrac{px}{r}+z = \dfrac{1}{r}(px+qy+rz) \geq |KC|$ dir.

$(px+qy+rz) \geq r.|KC|$ dir. $K$ noktasının yeri sabit olduğundan $\min(px+qy+rz) = r.|KC|$ olur ki bu da P noktası "*GFN*" olduğunda toplamın minimum olduğu anlamına gelir.

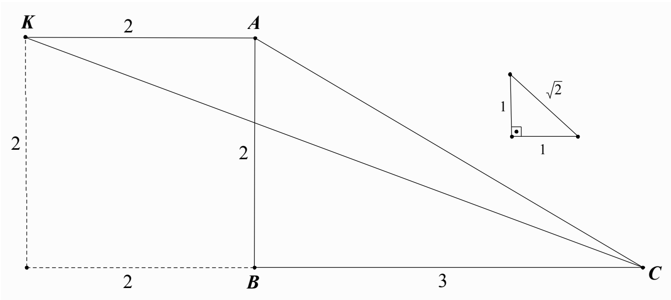
Özel olarak $p=q=r=1$ durumunda $P_1Q_1R_1$ eşkenar üçgen olup aranan toplam $x+y+z$ toplamının minimum değeridir ki bu şartı sağlayan nokta üçgende *"Fermat Toriçelli"* noktası olarak bilinir. $P_1Q_1R_1$ keyfi bir üçgen olduğundan, bulduğumuz nokta da *"Fermat Toriçelli"* noktasının genel hali olduğundan bu noktaya " *Genelleştirilmiş Fermat noktası"* denir.

*Örnek ( 2011 A.M.O. 1. aşama )*




*Şekil 9*

$ABC$ üçgeninde $|AB| = 2cm, |BC| = 3cm$ olup $P$ noktası üçgenin içbölgesinde bir noktadır. $|PA| = x, |PB| = y, |PC| = z$ olduğuna göre $\sqrt{2}x + y + z$ toplamının en küçük değeri nedir?

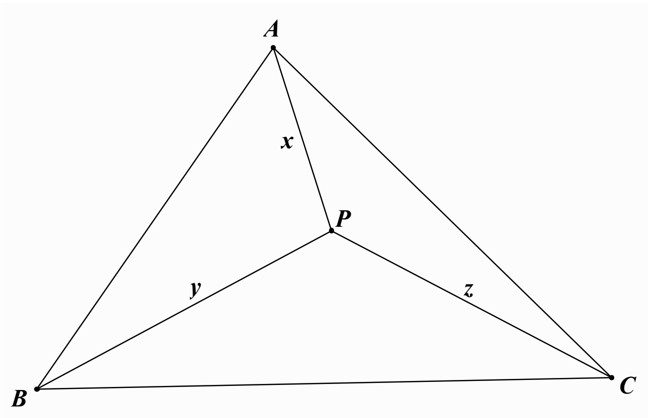



*Şekil 10*

*Çözüm :*

$p = \sqrt{2}, q = r = 1$ alınarak yandaki çizim yapılırsa aranan toplamın en küçük değeri $\left(= r|KC|\right) = \sqrt{29}$ bulunur.

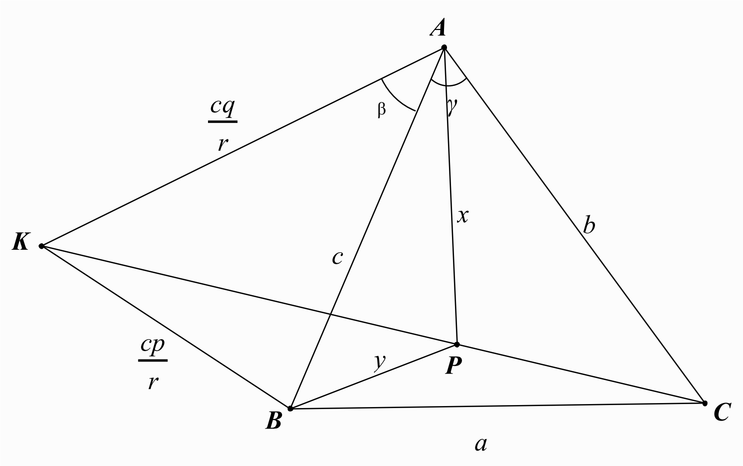
*Problem :*

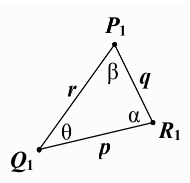



*Şekil 11*

$ABC$ üçgeninin kenar uzunlukları $a,b,c$ ve $p,q,r$ bir üçgenin kenar uzunlukları olduğuna göre $px+qy+rz$ toplamının en küçük değerini $a,b,c,p,q,r$ cinsinden hesaplayınız.

Çözüm :




*Şekil 12*

Aradığımız toplam $= r|KC|$

$P_1Q_1R_1$ üçgeninde *kosinüs teoremi'* nden $\cos\beta = \dfrac{q^2+r^2-p^2}{2qr}$ ……………..3

$ABC$ üçgeninde *kosinüs teoremi'* nden $\cos\gamma = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ……………...4

$Alan\left(P_1Q_1R_1\right) = T = \dfrac{1}{2}qr\sin\beta \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{2T}{qr}$ ……………………………….5

$Alan\left(ABC\right) = T' = \dfrac{1}{2}bc\sin\gamma \Rightarrow \sin\gamma = \dfrac{2T'}{bc}$ ……………………………….6

$$\cos\left(\beta+\gamma\right) = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma$$

$$= \frac{q^2+r^2-p^2}{2qr}\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - \frac{2T}{qr}\frac{2T'}{bc} = \frac{\left(q^2+r^2-p^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)-16TT'}{4bcqr}$$

$KAC$ üçgeninde *kosinüs teoremi'* nden:

$$|KC|^2 = b^2 + \frac{c^2q^2}{r^2} - 2\frac{bcq}{r}.\underbrace{\frac{\left(q^2+r^2-p^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)-16TT'}{4bcqr}}_{\cos(\beta+\gamma)}$$

$$= \frac{2b^2r^2+2c^2q^2-\left(q^2+r^2-p^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)+16TT'}{2r^2}$$

$$= \frac{2b^2r^2+2c^2q^2-q^2b^2-q^2c^2+q^2a^2-r^2b^2-r^2c^2+r^2a^2+q^2a^2+r^2a^2-p^2a^2+16TT'}{2r^2}$$

$$= \frac{p^2\left(b^2+c^2-a^2\right)+q^2\left(-b^2+c^2+a^2\right)+r^2\left(b^2-c^2+a^2\right)+16TT'}{2r^2} \Rightarrow$$

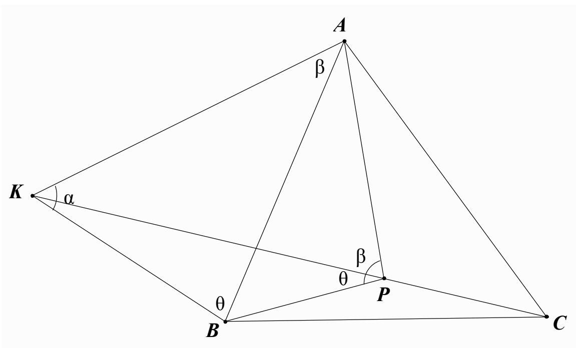
$$r^2|KC|^2=\frac{p^2\left(b^2+c^2-a^2\right)+q^2\left(-b^2+c^2+a^2\right)+r^2\left(b^2-c^2+a^2\right)+16TT'}{2}\Rightarrow$$

$$r|KC|=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{p^2\left(b^2+c^2-a^2\right)+q^2\left(-b^2+c^2+a^2\right)+r^2\left(b^2-c^2+a^2\right)+16TT'}\Rightarrow$$

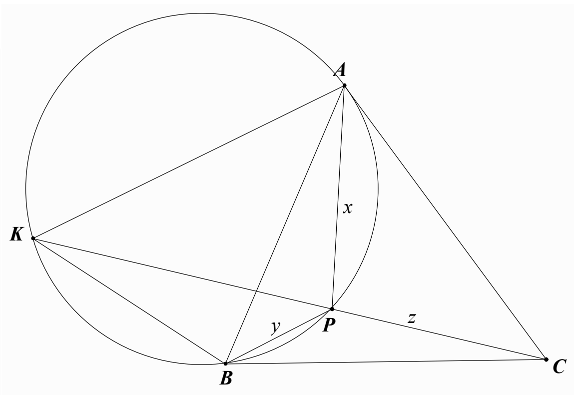
$$\min\left(px+qy+rz\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{p^2\left(b^2+c^2-a^2\right)+q^2\left(-b^2+c^2+a^2\right)+r^2\left(b^2-c^2+a^2\right)+16TT'}$$

Elde edilir. Son eşitlikte *p=q=r=1* alınırsa : $\min\left(x+y+z\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}T'}$ olur

ki bu sonuç *"Fermat Toriçelli noktası"* için bildiğimiz bir ifadedir.



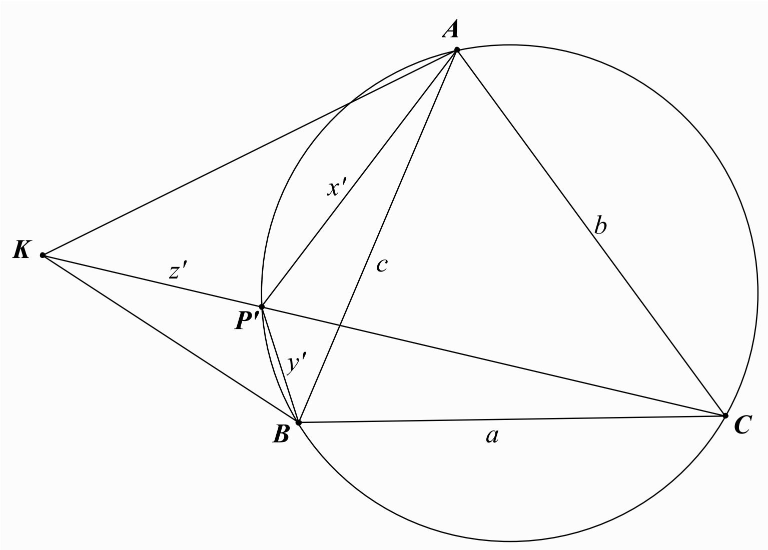

*Şekil 13*

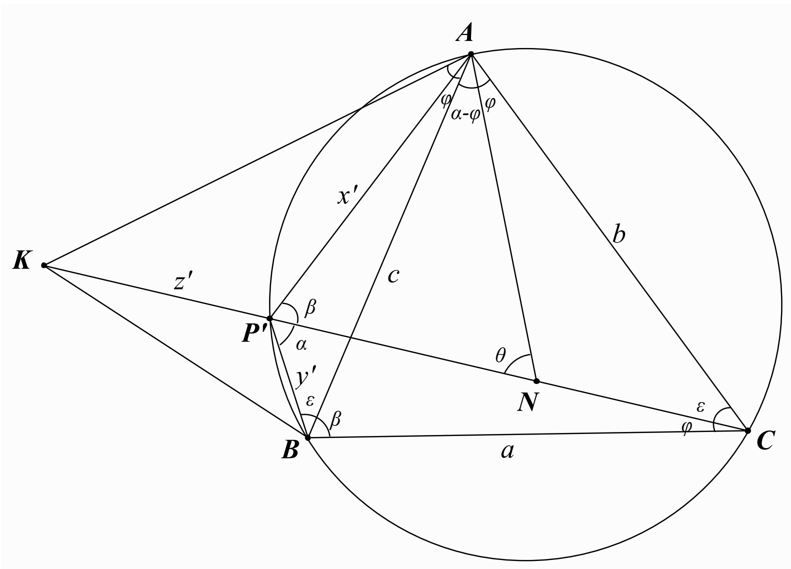



*Şekil 14*

*Şekil 13* te $\alpha+\beta+\theta=180^0$ olduğundan *KABP* kirişler dörtgenidir. Bu da bizim *P* noktasının yerini çizimle şu şekilde bulmamızı sağlar. $ABK \sim P_1Q_1R_1$ üçgeni çizilir ve bu üçgenin çevrel çemberinin $\left[BK\right]$ yı kestiği nokta ABC üçgeninin "*1. Genelleştirilmiş Fermat noktası*" dır.

$ABC$ üçgeninin çevrel çemberinin $[CK]$ yı kestiği noktaya *P'* diyelim. P' noktasına $ABC$ üçgeninin "*2. Genelleştirilmiş Fermat noktası*" diyelim.




$AP'N \sim ABC$ olacak şekilde $N \in [KC]$ alalım.

$$\frac{x'}{c} = \frac{|P'N|}{a} = \frac{|AN|}{b} \Rightarrow$$

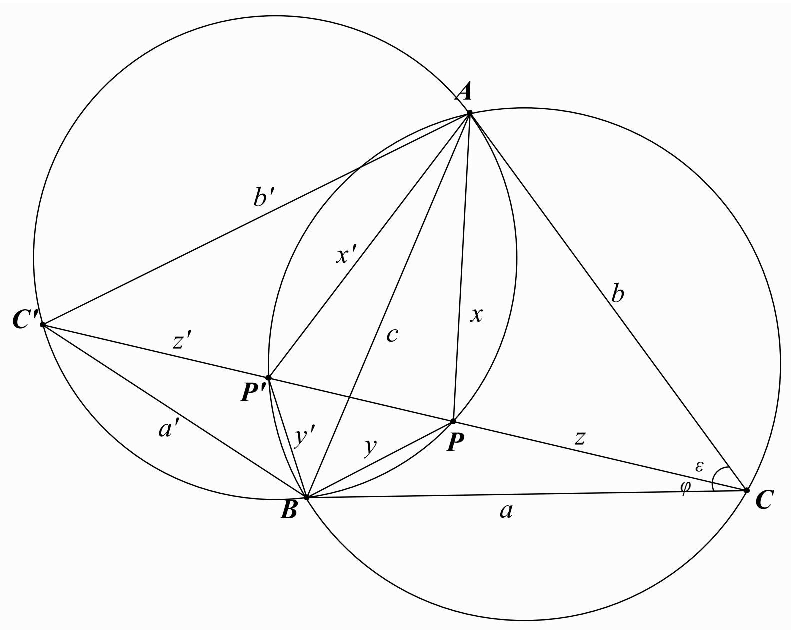
$$|P'N| = \frac{ax'}{c} \text{ ve } |AN| = \frac{bx'}{c}$$

$$ABP' \sim ACN \quad (AA) \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{bx'}{c}}{x'} = \frac{|NC|}{y'} \Rightarrow |NC| = \frac{by'}{c}$$

$|KC| = z' + \dfrac{ax'}{c} + \dfrac{by'}{c} \Rightarrow ax' + by' + cz' = c.|KC|$ elde edilir ki bunun anlamı

$\min(ax' + by' + cz') = c.|KC|$ ………………………………………………………..7




ABC üçgeninde P : "*Genelleştirilmiş Fermat noktası*" ve P' : "2. *Genelleştirilmiş Fermat noktası*" olsun. Uzunluklar yandaki gibi tanımlanmak üzere aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$a'x + b'y + cz = ax' + by' + cz'$

Çünkü : $|CC'| = \dfrac{a'r}{c}x + \dfrac{b'r}{c}y + rz = r|KC| \Rightarrow$

$a'x + b'y + cz = c|KC|$

$ax' + by' + cz' = c.|KC|$

Sonuç olarak : $a'x + b'y + cz = ax' + by' + cz'$ elde edilir.

Bu konunun üzerinde çalışma yapmaya açık bir konu olduğunu düşünüyor ve meraklısının ilgileneceği ümidiyle çalışmama burada virgül koyuyorum.

ALİ EKBER ATEŞ

İzmir Fen Lisesi matematik öğretmeni