

İFL Karmaşık Sayılar Çalışma Soruları:
(Ekim 2007)

01. $(1+i)^2 - (1-i)^4 + (1+i)^6 + (1+i)^8 = ?$

02. $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}} = ?$

03. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{11} \cdot \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8 = ?$

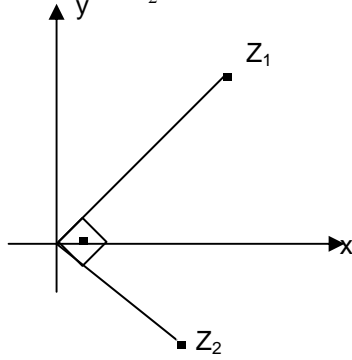
04. $\left(\frac{5+12i}{12-5i}\right)^{2002} = ?$

05. $(1+i)^3 + 8 = (x-yi)^2 + 2y^2$ ise $x+y = ?$

06. z bir karmaşık sayı olmak üzere,
 $3z - 2i = i(5i - z)$ olduğuna göre, $\text{Re}(z) = ?$

07. Şekildeki kompleks düzlemde
 $|z_1| = 2$, $|z_2| = 1$ olarak verilmiştir.

Buna göre, $\frac{z_1}{z_2} = ?$



08. $|z - 3 + 4i| = |z - 1|$

$|z - 2| = |z|$ sistemini sağlayan
geometrik yeri bulunuz.

09. $|z + 1 - 3i| = |4 + 3i|$ eşitliğini gerçekleştiren z
karmaşık sayılarının geometrik yerinin
denklemini bulunuz.

10. $A = \{z \in C : |z - (2 + 2i)| \leq 2\}$

$B = \{z \in C : |z| \geq 2\}$ olduğuna göre,

$A \cap B$ kümesinin karmaşık düzlemdeki
görüntüsünü bulunuz.

11. $Z = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}$ karmaşık sayısının
küp köklerini hesaplayınız.

12. $2 - \sqrt{3}i$ sayısının orijin etrafında negatif yönde
 60° döndürülüyor. Elde edilen yeni karmaşık
sayının sanal kısmı kaçtır?

13. $\frac{3i^{41} + i^6 + i^{24}}{2 - i^5 + i^{26} - i^{39}} + i = ?$

14. $i^{-26} - 2i^{-33} + i^{-110} = ?$

15. $3(x-2y) + x + 3 + [4(x+y) - 3(x+2y) + 2]i = 0$
ise x ve y 'yi bulunuz.

16. $1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2007} = ?$

17. $z = 4 - 9i$ olduğuna göre, $z^2 + z\bar{z}$ karmaşık
sayısının gerçek kısmı kaçtır?

18. $\bar{z} - 90 = 9|z|$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısının
uzunluğu kaçtır?

19. $|z| \leq 7$ olmak üzere; $|z + 15 - 8i|$ ifadesinin en
büyük ve en küçük değerlerinin toplamı kaçtır?

20. $|z + 2 - 2i| = 2$ çemberi ile koordinat eksenleri
arasında kalan alan kaç br^2 dir?

21. $A = \{z : |z + i| \leq 2, z \in C\}$ ve $B = \{z : |z| \leq |z - 1|\}$
ise $A \cap B$ grafiğini çizin.

22. $|z| \leq 4$ ise $|z - 12 + 5i|$ ifadesinin en büyük değerini
bulunuz.

23. $|z - 2i + 3| \leq 3$ eşitsizliği ile verilen noktalar
kümesi ile orijin arasındaki uzaklık en az kaçtır ?

24. $|z - 3i| \leq 4$ eşitsizliği ile verilen noktalar kümesi ile
orijin arasındaki uzaklık en çok kaçtır?

25. $\sqrt[5]{-1} = ?$

26. $(1+i)^{\frac{3}{5}} = ?$

27. $Z = \frac{\sin 18 - i \sin 72}{\cos 64 + i \cos 26}$ ise $\text{Arg} z = ?$

28. $\text{Arg} z_1 = \frac{\pi}{8}$ ve $\text{Arg} z_2 = \frac{3\pi}{4}$ ise

$\text{Arg} \left(\frac{z_1^4 \cdot \bar{z}_2}{z_2} \right) = ?$

29. $z = 2(\cos 245 + i \sin 245)$ ise $(\bar{z})^6 = ?$

30. $\frac{(\cos 20 + i \sin 160)(\cos 310 + i \sin 130)}{(\sin 85 + i \cos 85)^8} = ?$

31. $\frac{(\cos 18 - i \sin 18)(-\cos 10 + i \sin 10)}{-\sin 25 - i \cos 25} = ?$

32. $z = \sin 150 + i \cos 210$ olduğuna göre z^{10}
sayısının argümanı kaç derecedir?

33. $z = 2 + 2i$ karmaşık sayısı orijin etrafında pozitif yönde 75° lik bir açı ile döndürülürse hangi karmaşık sayılar elde edilir?
34. $Z = -2\sqrt{2}(1+i)$ karmaşık sayısı orijin etrafında negatif yönde $\frac{3\pi}{4}$ radyanlık dönme ile hangi noktaya gelir?
35. $Z^3 + i = 0$ denkleminin köklerini bulunuz.
36. $Z = 8(\sin 216 - i \cos 144)$ karmaşık sayısının küpköklerini bulunuz.
37. $9x^2 + ax - b = 0$ denkleminin bir kökü $x_1 = \frac{1}{3}(1+2i)$ ise (a, b) ikilisini bulunuz.
38. $P(x) = x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 2$ polinomunun $(x^3 - 2i)$ ile bölümünden elde edilen kalan nedir?
39. $x^2 + 2(3+i)x + k = 0$ denkleminin köklerinin çakışık olması için k ne olmalıdır?
40. $x^2 + (i-3)x + a + i = 0$ denkleminin bir kökü $(2-3i)$ ise a kaçtır?
41. $Z^4 + 4Z^3 - Z^2 + 16Z - 20 = 0$ denkleminin köklerinden biri $(2i)$ ise bu denklemin gerçek kökleri nedir?
42. $Z\bar{Z} + Z(Z - \bar{Z}) = 7 - 24i$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayılarını bulunuz.
43. Z bir karmaşık sayıdır. $\text{Im}(Z) = \sqrt{3}$ ve $\text{Re}\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{1}{4}$ koşulları ile verilen bu karmaşık sayıları bulunuz.
44. $Z\bar{Z} + Z - \bar{Z} = 13 - 6i$ ise $|Z| = ?$
45. $Z = a + i(a-2)$ ise $|Z - i\bar{Z}| = ?$
46. $f(Z) = |\bar{Z} + Z| + \frac{2}{Z}$ ise $\text{Im}[f(2-i)] = ?$
47. $|Z| \leq 3$ ve $Z_1 = 6 + 8i$ ise $|Z + Z_1|$ 'in en büyük değeri kaçtır?
48. $A = \{Z \in C : \text{Im}(Z) < 1 \text{ ve } Z\bar{Z} \geq 4\}$ kümesinin karmaşık düzlemdeki gösterimini yapınız.

49. $Z = \sin \alpha + i(1 + \cos \alpha)$ ise $|Z|$ ve $\text{Arg}(Z)$ nedir?
50. $Z = 6\text{Cis}20$, $W = 8(\cos 70 - i \sin 70)$ sayılarına karşılık gelen noktalar arasındaki uzaklık kaç birimdir?
51. $|Z + 2i| = 1$ koşulunu sağlayan karmaşık sayılardan argümenti en büyük olanın argümenti α_1 , en küçüğünün argümenti α_2 ise (α_1, α_2) ikilisi kaçtır?
52. $Z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ ve $Z_2 = -i$ ise $\text{Arg}(Z_1^4 \cdot Z_2^{-1})$ 'i bulunuz.
53. $\text{Arg}(Z+2) = 60^\circ$ ve $\text{Arg}(Z-2) = 150^\circ$ ise $\text{Re}(Z)$ kaçtır?
54. Z karmaşık sayısı orjin etrafında pozitif yönde 75° döndürüldüğünde $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ sayısı elde ediliyor. Z yi bulunuz.
55. Z karmaşık sayısı orjin etrafında pozitif yönde 40° döndürüldüğünde $1+2i$ noktası elde ediliyor ise Z nin orjin etrafında pozitif yönde 130° döndürülmesi ile hangi nokta elde edilir?
56. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz
- a) $\frac{i^7 - i^{60}}{i^{29} + 1} = ?$
- b) $\left(\frac{8+6i}{6-8i}\right)^{175} = ?$
- c) $\left(\frac{2+i}{1-2i}\right)^{77} \cdot \left(\frac{5-i}{1+5i}\right)^{45} \cdot i^{80} = ?$
- d) $\frac{256}{(1+i)^{14}} = ?$
57. $(z-1), (2+i) = 3-4i \Rightarrow z = ?$
58. $2-3i = \frac{5+z}{z} \Rightarrow z = ?$
59. $\frac{[2(\cos 18 + i \sin 18)]^5}{[4(\cos 40 + i \sin 40)]^3} = ?$
60. $\frac{(\cos 224 + i \sin 224)(\cos 135 + i \sin 135)}{(\cos 179 + i \sin 179)} = ?$
61. $\frac{\cos 15 - i \sin 15}{\cos 30 - i \sin 30} = a+bi$ ise $(a, b) = ?$
62. $z_1 = -4+4\sqrt{3}i$ ve $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \Rightarrow \text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = ?$

63. $\left| \frac{z}{z+2} \right| = 1$ eşitliğini sağlayan $z \in \mathbb{C}$ sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüsünü bulunuz.

64. $z \in \mathbb{C} \Rightarrow 4 \leq z \bar{z} \leq 16$ ifadesine karşılık gelen bölgenin alanını bulunuz.

65. $\sqrt{3}$ -i sayısının kareköklerini bulunuz.

66. $z = \sqrt{3}$ -i sayısına karşılık gelen noktayı orijin etrafında $\frac{\pi}{2}$ radyan dönme ile hangi noktaya gelir?

67. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) $\sqrt{5-12i} + \sqrt{8+6i}$

b) $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$

c) $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$

68. De Moivre formülünden faydalanarak aşağıdaki trigonometrik açılımları $\sin x$ ve $\cos x$ cinsinden bulunuz.

- a) $\cos 2x$ ve $\sin 2x$
- b) $\cos 3x$ ve $\sin 3x$
- c) $\cos 4x$ ve $\sin 4x$
- d) $\cos nx$ ve $\sin nx$
- e) $\operatorname{tg} nx$

69. $1+z+z^2+z^3+\dots+z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$ formülünü kullanarak

- a) $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\dots+\cos(n-1)x$
- b) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\dots+\sin(n-1)x$ toplamlarını bulunuz.

70. Aşağıdaki işlemleri sadeleştiriniz.

a) $\frac{\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right)^{\frac{15}{8}}}{\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{\frac{1}{3}}}$

b) $\frac{(\cos 3x + i \sin 3x)^5 \cdot (\cos x + i \sin x)^4}{(\cos 3x - i \sin 3x)(\cos 4x + i \sin 4x)^{-5}}$

71. $z \in \mathbb{C}$ için $|z|+z=4+2i \Rightarrow z=?$

72. $x^3+1=0$ denkleminin reel kökü $x_0 = -1$ dir.

Reel olmayan iki kökü x_1 ve $x_2 \Rightarrow$

3. $(x_1^3 + \bar{x}_2^3) + 2(x_2^3 + \bar{x}_1^3) = ?$

73. $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$, $\operatorname{Arg}(z_2) = \frac{5\pi}{6}$, $\operatorname{Arg}(z_3) = \frac{7\pi}{6}$
ve $3|z_1| = 2|z_2| = |z_3| \Rightarrow |z_2 - z_3| = ?$

74. $\frac{1}{1+i} + a+bi = 1-i \Rightarrow a+b=?$

75. $z = \frac{a-bi}{2b+2ai} \Rightarrow |6iz| = ?$

76. $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2+bx+c=0$ denkleminin köklerinden birisi $2+i$ ise b ile c arasındaki bağıntıyı bulunuz.

77. $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere $z+i = 1-iz \Rightarrow z^{2006}$ karmaşık sayısını bulunuz.

78. $z = \sqrt{3} + i$ olmak üzere $\operatorname{arg}(\bar{z}) = ?$

79. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere ;

$\operatorname{arg}(z_1) = \frac{\pi}{6}$ ve $z_2 = 1 - \sqrt{3}i \Rightarrow$

a) $\operatorname{arg}(z_1^2 \cdot z_2^5) = ?$

b) $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1^3}{z_2}\right) = ?$

80. Aşağıdaki kümeleri karmaşık düzlemde gösteriniz.

a) $A = \{ z \mid \operatorname{Re}(z) = 3 \}$

b) $B = \{ z \mid \operatorname{Im}(z) = -2 \}$

c) $C = \{ z \mid |z| = 2 \}$

d) $D = \{ z \mid |z-3+2i| = 4 \}$

e) $E = \{ z \mid |z-i+3| \leq 2 \}$

f) $F = \{ z \mid 3 \leq |z+1-i| < 5 \}$

g) $G = \{ z \mid \left| \frac{z+i}{z-i} \right| \leq 2 \}$

h) $H = \{ z \mid |z+i| \leq 2 \text{ ve } \operatorname{Re}(z) > 0 \}$

81. $f(z) = (a+bi+3i)z^2 + (b-2+ai)z + 4-14i$ için $f(1-i) = 5-13i \Rightarrow a$ ve b yi bulunuz. Sonra $f(z) = 0$ denklemini çözünüz.

82. $f(z) = (a+b)z^2 - (a-bi)z + 2-3i$ karmaşık katsayılı polinomunun $z-i$ ile bölümünden elde edilen kalan $7-4i$ ise (a, b) ikilisini bulunuz.

83. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $0 < a < \frac{\pi}{2} < b < \pi$ olmak üzere

$\left. \begin{aligned} z_1 &= \cos 2a + i \sin 2a \\ z_2 &= \cos 2b + i \sin 2b \end{aligned} \right\} \text{ veriliyor. } 1 - z_1 \text{ ve } 1 + z_2 \text{ sayılarının modül ve argümentlerini bulunuz.}$

84. $z = \frac{1-z_1}{1+z_2}$ sayısı için Izl ve $\text{arg}(z)$ yi hesaplayınız.

85. $z=8i-8$ karmaşık sayısı veriliyor.

- a) $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ küpköklerini bulunuz.
b) Küpköklere karşılık gelen noktaların ikişer ikişer aralarındaki uzaklıkların eşit olduğunu gösteriniz.
c) Alan ($\omega_0 \omega_1 \omega_2$) =?

86. $z = \frac{4}{1+\sqrt{3}i}$ karmaşık sayısının 5. dereceden köklerini bulunuz.

87. $z \in \mathbb{C}$ $z=x+yi$ olmak üzere $z^2 - 4\bar{z} + 4 = 0$ denklemini sağlayan $\text{im}(z)$ kümesinin karmaşık düzlemde grafiğini çiziniz.

88. $2z(1-\bar{z}) + |z|^2 + 2i + 1 = 0$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarını bulunuz.

89. $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ olmak üzere $z=1+\cos\theta+i\sin\theta$ için $z^3 \cdot \bar{z}^3 = ?$

90. $z = \frac{i}{3-3\sqrt{3}i}$ sayısının

- a) Kareköklerini,
b) Küpköklerini,
c) Dördüncü dereceden köklerini bulunuz.

91. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere ;
 $(\frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha})^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$ olduğunu ispatlayınız.

92. $z=\cos x + i\sin x$ olmak üzere
 $\cos x = \frac{z^2+1}{2z}$ ve $\sin x = \frac{z^2-1}{2iz}$ olduğunu gösteriniz.

93. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

- a) $x^2 + 2x + 2 = 0$
b) $2z^2 + (1-2i)z + 4 + 2i = 0$
c) $z^6 - (1-i)z^3 - i = 0$

94. $z^3 = 1$ denkleminin reel olmayan kökleri ω_0 ve ω_1 dir.

- a) $\bar{\omega}_0 = \omega_1$ b) $\bar{\omega}_1 = \omega_0$
c) $\omega_0^2 = \omega_1$ d) $\omega_1^2 = \omega_0$

eşitliklerinin doğru olduğunu gösteriniz.

95. $z^3 = 1$ denkleminin bir kökü ω dır. ($\omega \neq 1$)
a) $1 + \omega + \omega^2 = 0$

b) $(1+\omega-\omega^2)^3 - (1-\omega+\omega^2)^3 = 0$

c) $x=a+b$ $y=a\omega+b\omega^2$ $v=a\omega^2+b\omega \Rightarrow$

i) $xyv = a^3 + b^3$
ii) $x^2 + y^2 + v^2 = 6ab$ } olduğunu gösteriniz.

d) $\omega - \omega$, $\omega - 1$ ve $1 - \omega$ sayılarına karşılık gelen noktaları karmaşık düzlemde gösteriniz. Bu noktaların belirttiği üçgenin eşkenar üçgen olduğunu gösterip bir kenar uzunluğunu ve alanını bulunuz.

e) $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = ?$

96. $z^{2007} = 1$ denkleminin bir kökü ω dır.
($\omega \neq 1$) $\Rightarrow 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{2006} = ?$

97. Aşağıdaki karmaşık sayıları kutupsal biçimde yazarak, modül ve esas argümentlerini bulunuz.

- a) $z=1+\cos 80+i\sin 80$
b) $z=1-\cos 40+i\sin 40$

98. $|z+4i|=2$ olan z karmaşık sayılarından esas argümenti en büyük olanın reel kısmı kaçtır?

99. Aşağıdaki karmaşık sayıların yarılarında belirtilen açı kadar pozitif yönde döndürülmesiyle elde edilen karmaşık sayıları bulunuz.

a) $z=1+\sqrt{3}i \rightarrow \frac{\pi}{3}$ radyan

b) $z=2-3i \rightarrow \frac{\pi}{2}$ radyan

c) $z=2-\sqrt{3}i \rightarrow \frac{2\pi}{3}$ radyan

100. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $z=a+2+(b-2)i$ için $z \cdot \bar{z} = 0 \Rightarrow a^7 + b^7$ değeri kaçtır?

101. $z = x+yi$ olduğuna göre aşağıdaki şartlara uyan z karmaşık sayılarının geometrik yerini bulunuz.

a) $|\frac{z+i-1}{z+1-2i}| = 1$

- b) $3-4i$ noktasına uzaklığı 5 birimden küçük olan karmaşık sayılar
c) $\arg(z-i) - \arg(z+3) = 0$

102. $z=7-13i$ sayısının karekökleri ω_0 ve ω_1 dir. Buna göre aşağıdaki istenen değerleri bulunuz.

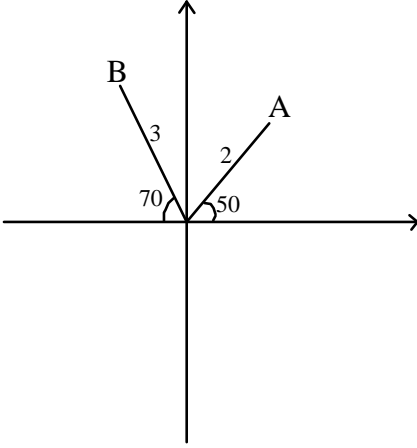
- a) $\omega_0 + \omega_1$
b) $\omega_0 + \omega_1 + \omega_0^2 + \omega_1^2$
c) $\omega_0 + \omega_1 + \omega_0^3 + \omega_1^3 + \omega_0^5 + \omega_1^5$

103. $z=x+yi$ ve $z'=a+bi$ olmak üzere ; $\arg(z-z') = \alpha$ olan noktaların geometrik yerinin grafiğini çiziniz. Bundan faydalanarak aşağıdaki karmaşık sayıların geometrik yerine ait grafikleri çiziniz.

a) $\arg(z-i) = \frac{\pi}{2}$ b) $\arg(z+2) = \frac{\pi}{4}$

$$c) \arg(z-1+i) = \frac{2\pi}{3}$$

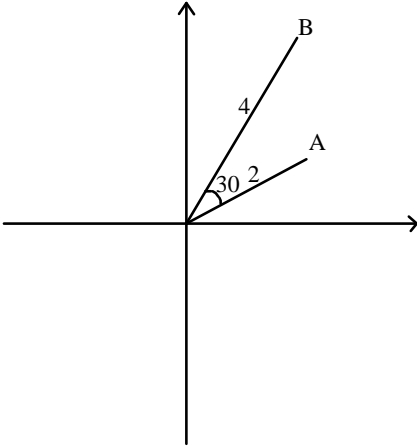
104.



Karmaşık düzlemdeki A noktası z_1 , B noktası z_2 karmaşık sayılarına karşılık gelmektedir. Buna göre aşağıdakileri bulunuz.

a) $z_1 \cdot z_2$ b) $\frac{z_1}{z_2}$ c) $z_1 \cdot \overline{z_2}$ d) $z_1 \cdot z_2^{-1}$

105.



A noktasına karşılık

gelen karmaşık sayı z_1 , B noktasına karşılık gelen

karmaşık sayı z_2 ise $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^6$ nın değeri kaçtır?

106. Aşağıdaki şartları sağlayan z karmaşık sayılarının esas argümenti en az ve en çok kaçtır?

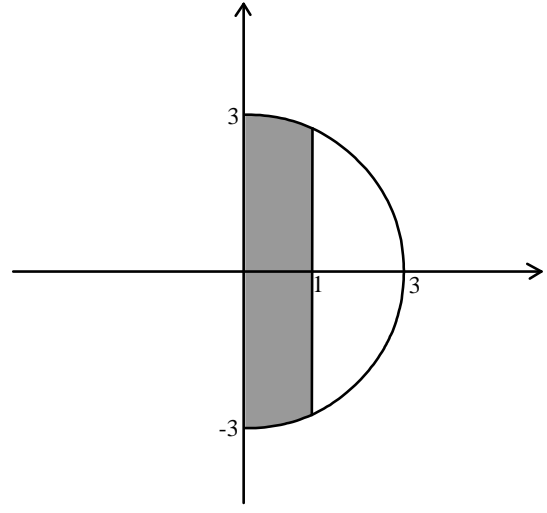
a) $|z+6|=3$ b) $|z-\sqrt{6}i|=\sqrt{3}$

107. $\arg(z+2)=\frac{\pi}{3}$ ve $\arg(z-i)=\frac{\pi}{2}$ eşitliklerini aynı

anda sağlayan z karmaşık sayısını bulunuz.

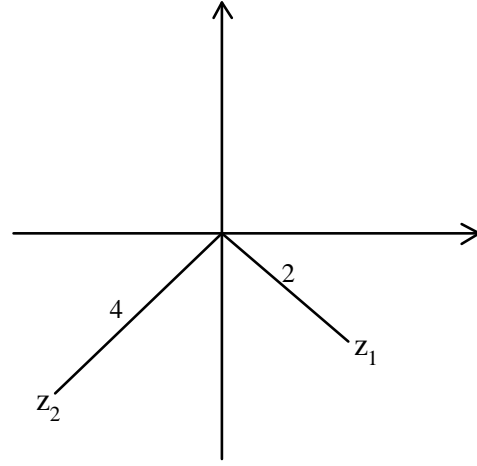
108. $|z| \leq 2 \Rightarrow |z+3-4i|$ ifadesinin max. ve min. değerlerini bulunuz.

109.



$z \in C$ olmak üzere şekildeki taralı alanı belirten kümeyi I z I , z , \overline{z} , $\operatorname{re}(z)$, $\operatorname{im}(z)$ ifadelerinden bir veya birkaçını kullanarak yazınız.

110.



$$m(z_1 Oz_2) = 60^\circ \Rightarrow z_1 \cdot z_2^{-1} = ?$$

111. Karmaşık düzlemde $|z-3i|=1$, $|z+4|=2$ şartını sağlayan çemberlerin a) En yakın b) En uzak noktaları arasındaki uzaklıkları bulunuz.

112. $z - \overline{z}(1-i) = 5+7i \Rightarrow \operatorname{Re}(\overline{z}) + \operatorname{im}(\overline{z}) = ?$

113. $(1-i)^n (1+i)^{n+1} + (1+i)^n (1-i)^{n+1}$ işleminin sonucunu bulunuz.

114. $|z-i\overline{z}| = 2-3i$ olduğuna göre $\operatorname{Re}(z) = ?$

115. $A = \{z \mid |z-2i| \leq 2, z \in C\}$

$B = \{z \mid |z-i| < 1, z \in C\}$ kümeleri veriliyor. $A \cap B'$ kümesine karşılık gelen noktaların oluşturduğu bölgenin alanını bulunuz.

116. $z \in C$ olmak üzere $1 \leq |z-2| \leq 2$ eşitsizliğinin karmaşık düzlemdeki görüntüsünü çiziniz.

İzmir Fen Lisesi Matematik Zümresi